JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij

4. travnja 2011.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent. Rezultati i uvid u kolokvije: **ponedjeljak, 11. travnja 2011. u 14 sati**.

1

Zadatak 1

(10 bodova.) Napišite kako izgleda **Lagrangeova** baza u prostoru polinoma stupnja manjeg ili jednakog n, za problem interpolacije na zadanoj mreži $\{x_0, \dots, x_n\}$ međusobno različitih čvorova. Navedite osnovna svojstva te baze i opišite kako izgleda pripadna matrica linearnog sustava za problem interpolacije $p(x_i) = f_i$, za $i = 0, \dots, n$, gdje je p polinom. Što su koeficijenti interpolacijskog polinoma zapisanog u Lagrangeovoj bazi?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

4. travnja 2011.

(10 bodova.) Funkcija f zadana je sljedećim razvojem u red potencija oko nule

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}x^2\right)^k}{k!\,(k+1)!}.$$

U zadanoj točki x, vrijednost funkcije $f(x)$ aproksimiramo tako da članove reda zbrajamo uzlazno po k, sve dok apsolutna vrijednost prvog odbačenog člana ne padne ispod zadane točnosti ε, gdje je $0 < \varepsilon \ll 1$, a zatim dobiveni zbroj pomnožimo faktorom ispred sume. Ako ovo računanje provedemo u aritmetici računala, za

(a) $x = -1/2$,

(b) $x = 20$,

hoće li takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

(Informacija: funkcija f je modificirana Besselova funkcija prve vrste reda 1, standardna oznaka je I_1.)

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 3

4. travnja 2011.

(10 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R tako da je $PA = LR$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

4. travnja 2011.

(10 bodova.) Zadana je matrica

$$A(x) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & x & 0 \\ 0 & x & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

gdje je x realni parametar. Nađite sve vrijednosti x za koje je $A(x)$ pozitivno definitna matrica i izračunajte pripadnu faktorizaciju Choleskog matrice $A(x)$.

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

4. travnja 2011.

(10 bodova.) Funkciju

$$f(x) = \sqrt{3x + 2}$$

treba aproksimirati po dijelovima linearnom interpolacijom φ na intervalu $[a, b]$, koristeći ekvidistantnu mrežu s n podintervala.

(a) Nađite najmanji n takav da ocjena uniformne pogreške na intervalu $[0, 2]$ ne prelazi $\varepsilon = 10^{-4}$. Za taj n, izračunajte aproksimaciju za $f(0.45)$ i pripadnu stvarnu pogrešku.

(b) Nađite točku $c > 2$ za koju vrijedi da su ocjene uniformne pogreške po dijelovima linearne interpolacije s n podintervala na $[0, 2]$ i $[2, c]$ jednake (obje mreže su ekvidistantne).

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij

4. travnja 2011.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent. Rezultati i uvid u kolokvije: **ponedjeljak, 11. travnja 2011. u 14 sati**.

1

Zadatak 1

(10 bodova.) Napišite iskaz teorema o egzistenciji i jedinstvenosti **Hermiteove** interpolacije zadanih vrijednosti funkcije i njezine prve derivacije polinomom stupnja najviše $2n$. Ukratko komentirajte što se događa ako bitni uvjeti teorema **nisu** ispunjeni. Ako u nekom čvoru želimo interpolirati funkciju i njezine derivacije raznih redova, kako treba zadati te podatke da bi problem **proširene** Hermiteove interpolacije uvijek imao jedinstveno rješenje?

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

4. travnja 2011.

(10 bodova.) Funkcija f zadana je sljedećim razvojem u red potencija oko nule

$$f(x) = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^k}{k!\,(2k+3)!!},$$

gdje je $(2k+3)!! = (2k+3) \cdot (2k+1) \cdots 3 \cdot 1$.

U zadanoj točki x, vrijednost funkcije $f(x)$ aproksimiramo tako da članove reda zbrajamo uzlazno po k, sve dok apsolutna vrijednost prvog odbačenog člana ne padne ispod zadane točnosti ε, gdje je $0 < \varepsilon \ll 1$, a zatim dobiveni zbroj pomnožimo faktorom ispred sume. Ako ovo računanje provedemo u aritmetici računala, za

(a) $x = 1/2$,

(b) $x = 20$,

hoće li takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

(Informacija: funkcija f je sferna Besselova funkcija prve vrste reda 1, standardna oznaka je j_1.)

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

4. travnja 2011.

(10 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R tako da je $PA = LR$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

4. travnja 2011.

(10 bodova.) Zadana je matrica

$$A(x) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & x & 0 \\ 0 & x & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

gdje je x realni parametar. Nađite sve vrijednosti x za koje je $A(x)$ pozitivno definitna matrica i izračunajte pripadnu faktorizaciju Choleskog matrice $A(x)$.

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

4. travnja 2011.

(10 bodova.) Funkciju

$$f(x) = (2x+3)^{3/2}$$

treba aproksimirati po dijelovima linearnom interpolacijom φ na intervalu $[a, b]$, koristeći ekvidistantnu mrežu s n podintervala.

(a) Nađite najmanji n takav da ocjena uniformne pogreške na intervalu $[0, 3]$ ne prelazi $\varepsilon = 10^{-4}$. Za taj n, izračunajte aproksimaciju za $f(0.85)$ i pripadnu stvarnu pogrešku.

(b) Nađite točku $c > 3$ za koju vrijedi da su ocjene uniformne pogreške po dijelovima linearne interpolacije s n podintervala na $[0, 3]$ i $[3, c]$ jednake (obje mreže su ekvidistantne).

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij

4. travnja 2011.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent. Rezultati i uvid u kolokvije: **ponedjeljak, 11. travnja 2011. u 14 sati**.

1

Zadatak 1

(10 bodova.) Napišite kako izgleda **Newtonova** baza u prostoru polinoma stupnja manjeg ili jednakog n, za problem interpolacije na zadanoj mreži $\{x_0, \ldots, x_n\}$ međusobno različitih čvorova. Opišite kako izgleda pripadna matrica linearnog sustava za problem interpolacije $p(x_i) = f_i$, za $i = 0, \ldots, n$, gdje je p polinom. Što su koeficijenti interpolacijskog polinoma zapisanog u Newtonovoj bazi? Koja je prednost Newtonove baze nad Lagrangeovom?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

4. travnja 2011.

(10 bodova.) Funkcija f zadana je sljedećim razvojem u red potencija oko nule

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}x^2\right)^k}{k!\,(k+2)!}.$$

U zadanoj točki x, vrijednost funkcije $f(x)$ aproksimiramo tako da članove reda zbrajamo uzlazno po k, sve dok apsolutna vrijednost prvog odbačenog člana ne padne ispod zadane točnosti ε, gdje je $0 < \varepsilon \ll 1$, a zatim dobiveni zbroj pomnožimo faktorom ispred sume. Ako ovo računanje provedemo u aritmetici računala, za

(a) $x = 1/2$,

(b) $x = 20$,

hoće li takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

(Informacija: funkcija f je Besselova funkcija prve vrste reda 2, standardna oznaka je J_2.)

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

4. travnja 2011.

(10 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R tako da je $PA = LR$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

4. travnja 2011.

(10 bodova.) Zadana je matrica

$$A(x) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & x & 0 \\ 0 & x & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

gdje je x realni parametar. Nađite sve vrijednosti x za koje je $A(x)$ pozitivno definitna matrica i izračunajte pripadnu faktorizaciju Choleskog matrice $A(x)$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

4. travnja 2011.

(10 bodova.) Funkciju

$$f(x) = \sqrt{2x+3}$$

treba aproksimirati po dijelovima linearnom interpolacijom φ na intervalu $[a, b]$, koristeći ekvidistantnu mrežu s n podintervala.

(a) Nađite najmanji n takav da ocjena uniformne pogreške na intervalu $[0, 3]$ ne prelazi $\varepsilon = 10^{-4}$. Za taj n, izračunajte aproksimaciju za $f(1.65)$ i pripadnu stvarnu pogrešku.

(b) Nađite točku $c > 3$ za koju vrijedi da su ocjene uniformne pogreške po dijelovima linearne interpolacije s n podintervala na $[0, 3]$ i $[3, c]$ jednake (obje mreže su ekvidistantne).

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij

4. travnja 2011.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent. Rezultati i uvid u kolokvije: **ponedjeljak, 11. travnja 2011. u 14 sati**.

1

Zadatak 1

(10 bodova.) Napišite definiciju **Čebiševljevog** polinoma prve vrste T_n, za $n \geq 0$, i navedite neka osnovna svojstva tih polinoma. Iskažite teorem o "minimalnom otklonu od nule" i njegovu primjenu na problem interpolacije polinomima.

JMBAG IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

4. travnja 2011.

(10 bodova.) Funkcija f zadana je sljedećim razvojem u red potencija oko nule

$$f(x) = x^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^k}{k!\,(2k+5)!!},$$

gdje je $(2k+5)!! = (2k+5) \cdot (2k+3) \cdots 3 \cdot 1$.

U zadanoj točki x, vrijednost funkcije $f(x)$ aproksimiramo tako da članove reda zbrajamo uzlazno po k, sve dok apsolutna vrijednost prvog odbačenog člana ne padne ispod zadane točnosti ε, gdje je $0 < \varepsilon \ll 1$, a zatim dobiveni zbroj pomnožimo faktorom ispred sume. Ako ovo računanje provedemo u aritmetici računala, za

(a) $x = -1/2$,

(b) $x = 20$,

hoće li takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

(Informacija: funkcija f je modificirana sferna Besselova funkcija prve vrste reda 2, standardna oznaka je $\mathrm{i}_2^{(1)}$.)

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

4. travnja 2011.

(10 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ -1 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R tako da je $PA = LR$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

4. travnja 2011.

(10 bodova.) Zadana je matrica

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & x & 0 \\ 0 & x & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

gdje je x realni parametar. Nađite sve vrijednosti x za koje je $A(x)$ pozitivno definitna matrica i izračunajte pripadnu faktorizaciju Choleskog matrice $A(x)$.

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

4. travnja 2011.

(10 bodova.) Funkciju

$$f(x) = (3x + 2)^{3/2}$$

treba aproksimirati po dijelovima linearnom interpolacijom φ na intervalu $[a, b]$, koristeći ekvidistantnu mrežu s n podintervala.

(a) Nađite najmanji n takav da ocjena uniformne pogreške na intervalu $[0, 2]$ ne prelazi $\varepsilon = 10^{-4}$. Za taj n, izračunajte aproksimaciju za $f(1.35)$ i pripadnu stvarnu pogrešku.

(b) Nađite točku $c > 2$ za koju vrijedi da su ocjene uniformne pogreške po dijelovima linearne interpolacije s n podintervala na $[0, 2]$ i $[2, c]$ jednake (obje mreže su ekvidistantne).